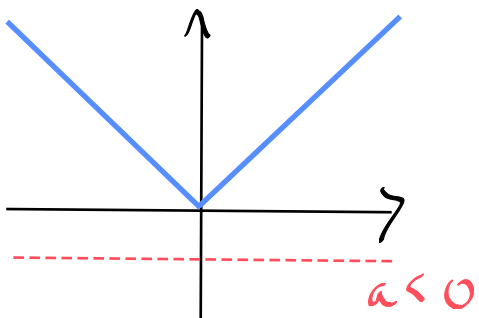


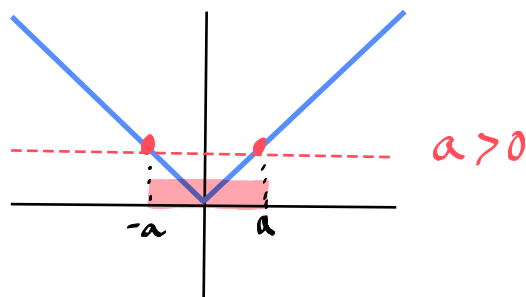
Inéquations avec valeur absolue

Premier exemple $|x| \leq a$



$$S = \emptyset$$

$$S = \{x \mid x \geq -a \text{ et } x \leq a\} \\ = \{x \mid -a \leq x \leq a\}$$



Si $a < 0$, cette expression donne toujours la réponse! $\leadsto$ Pas besoin d'un domaine de positivité!
Autrement dit,

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ x \geq -a \end{cases} \text{ quelque soit le signe de } a!$$

Plus généralement,

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases} \text{ quelque soit le signe de } g(x)!$$

Méthode générale pour $|f(x)| \leq g(x)$

- Trouver D_{def}
- Trouver $S_a = \{x \mid f(x) \leq g(x)\}$
- Trouver $S_b = \{x \mid f(x) \geq -g(x)\}$
- $S = S_a \cap S_b \cap D_{\text{def}}$

Exemple : Résoudre $|x - \frac{1}{x-1}| \leq \frac{-1}{x-1}$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$|x - \frac{1}{x-1}| \leq \frac{-1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x-1} \leq \frac{-1}{x-1} & (a) \\ x - \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x-1} & (b) \end{cases}$$

$$(a) \quad x - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \leq 0 ; \quad x \leq 0$$

$$\hookrightarrow S_a =]-\infty ; 0]$$

$$(b) x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \geq 0 ; x - \frac{2}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x(x-1)-2}{x-1} \geq 0 ; \frac{x^2-x-2}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \geq 0 \rightarrow \text{zéros des facteurs: } -1; 1; 2$$

x	-1	1	2
$x-2$	-	-	- 0 +
$x+1$	- 0 +	+	+
$x-1$	-	- 0 +	+
$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$	- 0 +	+	- 0 +

$$\hookrightarrow S_b = [-1; 1[\cup [2; +\infty[$$

Solution Générale

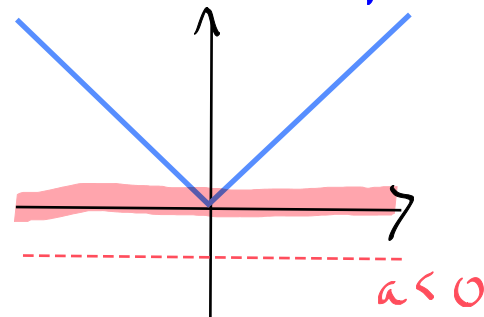
$$S = S_a \cap S_b \cap D_{\text{dég}}$$

$$=]-\infty; 0] \cap ([-1; 1[\cup [2; +\infty[) \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\})$$

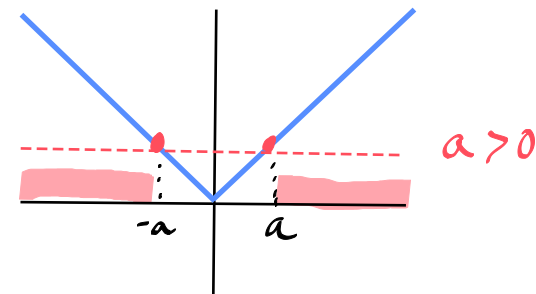
$$\hookrightarrow A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$$

$$S = [-1; 0]$$

Deuxième exemple $|x| \geq a$



$$S = \mathbb{R}$$



$$S = \{x \mid x \geq a \text{ ou } x \leq -a\}$$

Comme avant, $\hookrightarrow S \subseteq \{x \mid x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0\}$ si $a < 0$
pas besoin de P_{pos} !

Autrement dit,

$$|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases} \text{ quel que soit le signe de } a!$$

Plus généralement,

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \text{ quel que soit le signe de } g(x)!$$

On remarque,

$$[|f(x)| \geq g(x)] = \text{Non} [|f(x)| < g(x)]$$

Méthode générale pour $|f(x)| \geq g(x)$

- Trouver D_{def}
- Trouver $S_a = \{x \mid f(x) \geq g(x)\}$
- Trouver $S_b = \{x \mid f(x) \leq -g(x)\}$
- $S = (S_a \cup S_b) \cap D_{\text{def}}$

On adapte la méthode pour une inégalité stricte!

Exemple. Résoudre $|x^2 + 3x - 1| > x^2 + x + 1$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 1 > x^2 + x + 1 & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 1 < -x^2 - x - 1 & (b) \end{cases}$$

$$(a) \quad 2x - 2 > 0; \quad x > 1$$

$$S_a =]1; +\infty[$$

$$(b) \quad 2x^2 + 4x < 0; \quad 2x(x+2)$$

↳ zéros : 0 et -2

x	-2		0	
$2x$	$-$	$ $	$-$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$2x(x+2)$	$+$	0	$-$	0

$$S_b =]-2; 0[$$

Solution Générale

$$S = (S_a \cup S_b) \cap D_{\text{def}}$$

$$=]-2; 0[\cup]1; +\infty[$$